XVIII JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY
IM. HUGONA STEINHAUSA
1 grudnia 2018

„Żadna nauka nie wzmacnia tak wiary w potęgę umysłu ludzkiego, jak matematyka.'"

POZIOM PIERWSZY – po szkole podstawowej

1. W pewnym prostokącie długość jednego z boków zwiększono o x%, a drugiego zmniejszono o x%, przy czym x jest pewną liczbą pierwszą. Znajdź wszystkie wartości x, dla których pole powstałego w ten sposób prostokąta będzie większe od 98% pola danego prostokąta.
2. Każda z liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2019}$ jest równa 1 lub -1. Wyznacz najmniejszą możliwą wartość wyrażenia $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_4 + \dots + x_{2019} \cdot x_1$.
3. Wyznacz wszystkie liczby pięciocyfrowe $\overline{abcde}$, które dzielą się przez 36 i w których $a < b < c < d < e$.
4. Ojciec postanowił rozdzielić swój majątek pomiędzy swoich synów. Najstarszemu dał 1000 złotych i dziesiątą część pozostałej części. Drugi syn otrzymał 2000 złotych i dziesiątą część pozostałej części majątku. Trzeci syn otrzymał 3000 złotych i dziesiątą część tego co zostało. Itd. W ten sposób każdy z synów otrzymał tyle samo pieniędzy. Oblicz ile pieniędzy było do podziału? Ilu było synów oraz po ile złotych przypadło każdemu z nich?

POZIOM PIERWSZY – po gimnazjum

1. W pewnym prostokącie długość jednego z boków zwiększono o x%, a drugiego zmniejszono o x%, przy czym x jest pewną liczbą pierwszą. Znajdź wszystkie wartości x, dla których pole powstałego w ten sposób prostokąta będzie większe od 98% pola danego prostokąta.
2. Każda z liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2019}$ jest równa 1 lub -1. Wyznacz najmniejszą możliwą wartość wyrażenia $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_4 + \dots + x_{2019} \cdot x_1$. Odpowiedź uzasadnij.
3. Ile liczb trzycyfrowych podzielnych przez 9 ma następującą własność: suma cyfr ilorazu tej liczby przez 9 jest o 9 mniejsza od sumy jej cyfr?
4. Niech a, b, c będą długościami krawędzi prostopadłościanu o polu powierzchni całkowitej P. Wykaż, że $a + b + c \geq \sqrt{\frac{3P}{2}}$.

POZIOM DRUGI

1. Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c, d, że spełnione są równości: $a + b = c + d$ oraz $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Wykaż, że $a^5 + b^5 = c^5 + d^5$.
2. Wyznacz wszystkie liczby całkowite a, dla których układ równań: $\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2a \end{cases}$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych x, y, z.
3. Niech $a, b, c \in (0,1)$. Wykaż, że co najmniej jedna z liczb $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ nie przekracza $\frac{1}{4}$.
4. Dany jest trójkąt ABC o polu równym 21. Na bokach AB, BC, CA tego trójkąta obrano odpowiednio punkty P, Q, R tak, że $\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|BQ|}{|QC|} = \frac{|CR|}{|RA|} = 2$. Odcinki AQ, BR, CP przecinając się, wyznaczyły trójkąt. Obliczyć pole tego trójkąta.

POZIOM TRZECI

1. Rozwiąż nierówność $2^{sinx} + 2^{cosx} \geq 2^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.
2. Danych jest 5 odcinków różnej długości takich, że z każdych trzech wybranych spośród nich da się zbudować trójkąt. Wykazać, że co najmniej jeden z tych trójkątów jest ostrokątny.
3. Znajdź wszystkie wielomiany W takie, że $\bigwedge_{x \in R} W(x) + W(4x) = W(2x) + W(3x)$.
4. Wykaż, że jeżeli $x > 1$ i dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość $[x^n] = [x]^n$, to x jest liczbą całkowitą dodatnią.