



# XVIII JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY IM. HUGONA STEINHAUSA

1 grudnia 2018



*„Żadna nauka nie wzmacnia tak wiary w potęgę umysłu ludzkiego,  
jak matematyka.”*

## POZIOM PIERWSZY

1. Wyznacz wszystkie trójki liczb pierwszych  $p, q, r$ , spełniające równanie  
$$p + r\sqrt{p+q} + q = 30.$$
2. Wysokości trójkąta mają długości  $h_a = 156$ ,  $h_b = 65$ ,  $h_c = 60$ . Oblicz pole tego trójkąta.
3. Wykaż, że jeśli  $n$  jest liczbą naturalną większą od 1, to liczba  $\underbrace{444 \dots 4}_n \underbrace{888 \dots 8}_n 9$  jest kwadratem liczby naturalnej.
4. Dwa punkty poruszają się ruchem jednostajnym po okręgu w tym samym kierunku, przy czym jeden z nich wyprzedza drugiego co 44 sekundy. Jeżeli zmienić kierunek ruchu jednego z tych punktów na przeciwny, to będą one się spotykać co 8 sekund. Oblicz stosunek prędkości tych punktów.

## POZIOM DRUGI

1. Znajdź wszystkie trójki liczb rzeczywistych  $a, b, c$ , dla których zachodzi równość  
$$\sqrt{a-b+c} = \sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$
2. Udowodnij, że jeżeli liczby  $a, b, c, d$  spełniają warunek  $a < b < c < d$ , to równanie:  
$$(x-a)(x-c) + (x-b)(x-d) = 0$$
 ma dwa różne rozwiązania w zbiorze liczb rzeczywistych.
3. Liczby  $a$  i  $b$  to dwie niekolejne liczby naturalne nieparzyste takie, że  $a < b$ . Suma wszystkich liczb naturalnych większych od  $a$  i mniejszych od  $b$  jest równa 1000. Znajdź liczby  $a$  i  $b$ .
4. Podstawy trapezu mają długości  $a$  i  $b$ . Wyznacz długość odcinka, o końcach należących do ramion trapezu, równoległego do podstaw i dzielącego pole trapezu na połowy.

## POZIOM TRZECI

1. Zbadaj, czy istnieje wielomian trzeciego stopnia o współczynnikach całkowitych, który ma w zbiorze liczb rzeczywistych jedyny pierwiastek  $x_0 = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ ?
2. Liczby rzeczywiste spełniają równość:  
$$\left(\frac{x^2+y^2}{4xy}\right)^0 + \left(\frac{x^2+y^2}{4xy}\right)^1 + \left(\frac{x^2+y^2}{4xy}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x^2+y^2}{4xy}\right)^{1999} = 1,999.$$
Udowodnij, że  $x \cdot y < 0$ .
3. Dany jest czworościan ABCS, którego krawędzie wychodzące z wierzchołka S są parami prostopadłe i mają odpowiednio długości  $a, b, c$ . Wykaż, że wysokość poprowadzona z wierzchołka S tego czworościanu wynosi  $\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$ .
4. Dwaj znajomi umówili się na spotkanie, przyjmując następujące warunki:
  - w ustalone miejsce spotkania przychodzą oni niezależnie od drugiego nie wcześniej niż o godzinie 13:00
  - po przyjsciu każdy z nich oczekuje na drugiego nie dłużej niż pół godziny oraz opuszcza miejsce spotkania nie później niż o 14:00.Przedstaw w układzie współrzędnych ilustrację graficzną zadania. Jakie jest prawdopodobieństwo że znajomi ci spotkają się?