# XVII JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY
# IM. HUGONA STEINHAUSA
## 9 grudnia 2017

*„Przez trzy dowolnie wybrane punkty można poprowadzić prostą, pod warunkiem, że jest odpowiednio gruba”*

## POZIOM PIERWSZY

1. Reszta z dzielenia dodatniej liczby naturalnej $n$ przez 13 jest równa 10, natomiast reszta z dzielenia liczby $n$ przez 17 wynosi 11. Wyznacz resztę z dzielenia liczby $n$ przez 221.

2. Dany jest trójkąt ABC o polu równym 4. Niech punkt P będzie takim punktem wewnętrznym tego trójkąta, że łącząc go ze środkami wszystkich boków, podzielimy trójkąt ABC na trzy czworokąty. Uzasadnij, że co najmniej dwa z tych czworokątów mają pola większe od 1.

3. 20 robotników potrzebuje 5 dni, aby pracując dziennie po 8 godzin, wykonać 250 sztuk pewnego towaru. Ile dni potrzebowałoby 16 robotników aby wykonać 300 sztuk tego samego towaru, pracując dziennie po 10 godzin.

4. W ilu podzbiorach zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 12\}$ suma elementu najmniejszego i największego wynosi 13?

---

## POZIOM DRUGI

1. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AC ma długość 2, a wysokość BD ma długości 1.
Na wysokości BD wybrano punkt P. Uzasadnij, że suma odległości punktu P od wierzchołków trójkąta ABC jest nie mniejsza od $1 + \sqrt{3}$.

2. Liczby dodatnie $p$, $q$, $r$ spełniają warunek: $p + q + r < 12$. Wykaż, że co najmniej jedno z równań: $x^2 + px + q = 0$, $x^2 + qx + r = 0$, $x^2 + rx + p = 0$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

3. Znajdź w układzie dziesiętnym wszystkie liczby naturalne równe jedenastokrotności sumy swoich cyfr.

4. Dany jest układ równań $\begin{cases} |1 - x| = a \\ |x - y| = b \\ |y - 1| = c \end{cases}$, gdzie $a, b, c$ są liczbami naturalnymi spełniającymi warunek $a^2 + b^2 + c^2 > 0$. Uzasadnij, że ten układ ma dwa rozwiązania, albo jest sprzeczny. Podaj warunki istnienia rozwiązania.

---

## POZIOM TRZECI

1. Na bokach AC i BC trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty M i N w taki sposób, że prosta MN jest równoległa do boku AB. Znajdź punkt K leżący na boku AB, dla którego iloczyn pól trójkątów CMK oraz CNK jest największy. Uzasadnij wybór.

2. Z cyfr 1, 2, 3, …, 9 utworzono wszystkie możliwe liczby czterocyfrowe o różnych cyfrach. Oblicz sumę tych liczb.

3. Rozwiąż równanie $2x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3} = 0$.

4. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b$ oraz $\alpha, \beta$ prawdziwa jest nierówność
$|a\sin\alpha + b\sin\beta| \leq \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha + \beta)}$.