XVI JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY
IM. HUGONA STEINHAUSA
3 grudnia 2016

„Między duchem a materią pośredniczy matematyka"

POZIOM PIERWSZY

1. Liczba naturalna n jest większa od 1887. Wykaż, że jeżeli liczby n oraz $n+2$ są liczbami pierwszymi, to liczba $n+1$ jest podzielna przez 6.
2. Wykaż, że jeśli liczba całkowita a nie dzieli się przez 5, to liczba a^8+3a^4-4 jest podzielna przez 100.
3. Wykaż, że dla dowolnych liczb $x, y, z \epsilon R$ takich, że $xyz > 0$ prawdziwa jest nierówność $\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x} \geq x+y+z.$
4. Sześciokąt foremny ma pole równe 36. Oblicz pole gwiazdy sześcioramiennej wyznaczonej przez krótsze przekątne tego sześciokąta.

POZIOM DRUGI

1. Znajdź wszystkie liczby całkowite k, dla których liczba k^3+3 jest podzielna przez $k+3$. Odpowiedź uzasadnij.
2. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{15}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right) < 2.$
3. Długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt, którego długości wszystkich boków są liczbami naturalnymi jest równa 1. Wykaż, że długości boków tego trójkąta wynoszą 3, 4 i 5.
4. Jaka jest najmniejsza liczba naturalna n taka, że w dowolnym n −elementowym zbiorze punktów płaszczyzny o współrzędnych całkowitych znajduje się para punktów, będąca końcami odcinka, którego środek jest również punktem o współrzędnych całkowitych? Odpowiedź uzasadnij.

POZIOM TRZECI

1. Wyznacz wartość sumy $\frac{2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{2}{2\cdot3\cdot4}+\frac{2}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{2}{1970\cdot1971\cdot1972}$. Odpowiedź uzasadnij.
2. Udowodnij, że jeżeli liczby rzeczywiste x, y, u, v spełniają warunki: $x^2+y^2=u^2+v^2=1$ i $xu+yv=0$, to $x^2+u^2=1$ i $y^2+v^2=1$ i $xy+uv=0$.
3. Dana jest liczba czterocyfrowa x, której każde dwie cyfry są różne i żadna z nich nie jest zerem. Niech zbiór A będzie zbiorem wszystkich liczb, które można otrzymać z x przez przestawienie jej cyfr. Wykaż, że w zbiorze A można znaleźć dwie liczby, których różnica jest podzielna przez 3.
4. Na przedłużeniach boków AB, BC i CA trójkąta ABC obrano odpowiednio takie punkty B_1, C_1, A_1, że $B\epsilon\overline{AB_1}$, $C\epsilon\overline{BC_1}$, $A\epsilon\overline{CA_1}$ oraz $|BB_1|=|AC|$, $|CC_1|=|AB|$, $|AA_1|=|BC|$. Udowodnij, że suma pól trójkątów AA_1B, BB_1C i CC_1A jest co najmniej trzy razy większa od pola trójkąta ABC.