XV JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY
IM. HUGONA STEINHAUSA
5 grudnia 2015

Klasa I

1. Wykaż, że istnieje liczba naturalna n taka, że $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^5=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.
2. Punkty A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8 dzielą okrąg na 8 równych łuków, punkt P jest punktem przecięcia cięciw A_1A_4 i A_3A_6. Wyznacz miarę kąta A_1PA_6.
3. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p i q takie, że liczba 4pq + 1 jest kwadratem liczby naturalnej.
4. (S) Z dziewięciu kwadratów o bokach długości: 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 18 złożyć prostokąt. Kwadraty nie mogą być rozcinane, ani zakładane, choćby częściowo, na siebie. Nie może też być między kwadratami wolnego miejsca. Na rysunku przedstawić dokładne ułożenie każdego z kwadratów.

Klasa II

1. Udowodnij, że jeśli a, b, c, d są różnymi liczbami pierwszymi, to suma $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$ nie jest liczbą naturalną.
2. Wyznacz długości boków trójkąta prostokątnego, którego obwód jest równy 390, a długość wysokości poprowadzonej do przeciwprostokątnej wynosi 60.
3. Samochód ciężarowy jadący ze stałą prędkością 62 km/h zaczyna być wyprzedzany przez samochód osobowy jadący ze stałą prędkością 98 km/h. Przyjmijmy, że długość samochodu osobowego wynosi a (metrów), zaś długość samochodu ciężarowego b (metrów). Ile sekund upłynie od chwili, gdy przód samochodu osobowego znajdzie się w jednej linii (prostopadłej do osi jezdni) z tyłem samochodu ciężarowego, do chwili, gdy tył samochodu osobowego znajdzie się w jednej linii z przodem samochodu ciężarowego ?
4. (S) Aby podzielić dany kąt na trzy kąty równe czynimy to następująco: łączymy odcinkiem dwa punkty obu ramion oddalone jednakowo od wierzchołka kąta; otrzymany odcinek dzielimy na trzy równe odcinki i przez dwa punkty podziały prowadzimy półproste z wierzchołka kąta. Czy ta konstrukcja jest dokładna ? Odpowiedź szczegółowo uzasadnij.

Klasa III

1. Liczbę 2015 przedstaw na wszystkie możliwe sposoby jako sumę pewnej ilości (co najmniej dwóch) kolejnych liczb naturalnych.
2. Rozwiąż równanie $2^{n-1}\cdot(\sin^{2n}x+\cos^{2n}x)=\sin^{n}2x$, gdzie $n\in N_+$.
3. Niech a, b, c będą długościami boków trójkąta o obwodzie równym 1. Wykaż, że prawdziwa jest nierówność $\frac{1+a}{1-2a}+\frac{1+b}{1-2b}+\frac{1+c}{1-2c}>6$.
4. (S) W trójkącie równobocznym ABC o boku długości a obrano punkty D, E, F odpowiednio na bokach AB, BC i CA tak, że $|AD|=|BE|=|CF|=\frac{a}{3}$. Następnie poprowadzono odcinki: AE, CD i BF. Punkty przecięcia tych odcinków są wierzchołkami trójkąta KLM. Jaką częścią pola trójkąta ABC jest pole trójkąta KLM ?