XXXIV KONKURS MATEMATYCZNY
im. prof. Jana Marszała (finał)
(16 listopada 2018 r. godz. 10.00 – 12.00)

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS PIERWSZYCH

Zadanie 1.
Trójkąt prostokątny wpisano w okrąg o promieniu R. Stosunek pola trójkąta do pola koła wynosi: $\sqrt{3} : 2\pi$. Wyznacz obwód trójkąta.

Zadanie 2.
Uzasadnij, że dla dowolnych liczb x i y prawdziwa jest nierówność: $9x^4 + y^4 + 10 \geq 12xy$.

Zadanie 3.
Wyznacz wszystkie trzy liczby pierwsze, których iloczyn jest 3 razy większy od ich sumy.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS DRUGICH

Zadanie 1.
W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczną CD. Wiadomo, że środek okręgu wpisanego w trójkąt BCD pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wyznacz miary kątów trójkąta ABC.

Zadanie 2.
Wiedząc, że x≠0 oraz $x^2 + \frac{1}{x^2} = a \ i \ a \geq 2$ wykaż, że : $x^{10} + \frac{1}{x^{10}} = a^5 - 5a^3 + 5a$.

Zadanie 3.
Znajdź wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczby $p + 10$ i $p + 14$ też są pierwsze . Następnie oblicz wartość wyrażenia : $\frac{1}{(p-2)p} + \frac{1}{p(p+2)} + \frac{1}{(p+2)(p+4)} + \cdots + \frac{1}{(p+2016)(p+2018)}$ dla wszystkich wyznaczonych p.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS TRZECICH

Zadanie 1.
Dla jakich wartości parametru $m \epsilon R$ równanie $(2m + 4) \cdot 4^x - (m + 4) \cdot 2^x + m = 0$, ma dwa różne rozwiązania ujemne ?

Zadanie 2.
Udowodnij twierdzenie :
Jeżeli $a, b, x, y \in R_+$ i $a^5 + b^5 \leq 1$ i $x^5 + y^5 \leq 1$, to $a^2x^3 + b^2y^3 \leq 1$.

Zadanie 3.
Na okręgu o promieniu r obrano trzy różne punkty A, B, C tak, że odcinek |AB|=2r oraz styczna do okręgu w punkcie B i sieczna AC przecinają się w punkcie M. Wiedząc, że styczna do okręgu w punkcie C przecina odcinek BM w punkcie P takim, że |PM| $= \frac{r}{2}$, oblicz obwód trójkąta ABC.