

XXXIII KONKURS MATEMATYCZNY

im. prof. Jana Marszała (finał)
(17 listopada 2017 r. godz. 10.00 – 12.00)

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS PIERWSZYCH

Zadanie 1.

Dowieść, że liczba 5^{100} ma nie więcej niż 70 cyfr.

Zadanie 2.

Rozwiąż równanie w zbiorze liczb rzeczywistych :

$$3\left(\frac{x^2}{yz}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{xz}\right)^2 + \left(\frac{1}{xy}\right)^2 + \left(\frac{6}{xyz}\right)^2 = 2\left[\frac{9x}{y^2z^2} + \frac{4}{x^2z^2} + \frac{1}{x^2y^2z}\right].$$

Zadanie 3.

W trójkącie równobocznym o boku 10 wybrano 201 punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Udowodnij , że pewne trzy są wierzchołkami trójkąta o polu nie większym niż $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS DRUGICH

Zadanie 1.

Wykaż, że dla każdej liczby pierwszej $p > 3$ liczba $\frac{p^{12} - p^8 - p^4 + 1}{4608}$ jest całkowita.

Zadanie 2.

Wyznacz największą wartość funkcji :

$$f(x) = -\left(\sqrt{\sqrt{4x^2 + 1} + 2x} + \sqrt{\sqrt{4x^2 + 1} - 2x}\right)$$

Zadanie 3.

W trapezie ABCD poprowadzono odcinek EF równoległy do podstaw AB i CD. Pole trapezu FECD jest k ($k > 0$) razy większe od pola trapezu ABEF. Oblicz długość odcinka EF , jeżeli $|AB| = a$ i $|CD| = b$

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS TRZECICH

Zadanie 1.

Rozwiąż nierówność : $2^{\sqrt{x+1}} < -x + 2\sqrt{x+1}$.

Zadanie 2.

Liczby x, y, z są pierwiastkami równania $t^3 + pt + q = 0$ z niewiadomą t .
Udowodnij, że : $x^5 + y^5 + z^5 = 5pq$.

Zadanie 3.

Wiedząc, że α, β, γ są miarami kątów wewnętrznych trójkąta leżących naprzeciw boków o długości odpowiednio a, b, c , dowieść , że : $\sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}$.