XXXII KONKURS MATEMATYCZNY
im. prof. Jana Marszała (finał)
(18 listopada 2016 r. godz. 10.00 – 12.00)

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS PIERWSZYCH

Zadanie 1.
Wykaż, że jeśli a + b = 1 to $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$.

Zadanie 2.
Dla całkowitych x znajdź wszystkie całkowite wartości wyrażenia : $\frac{x-5}{3x+2}$.

Zadanie 3.
W trójkącie prostokątnym poprowadzono proste równoległe do przyprostokątnych styczne do okręgu wpisanego w ten trójkąt. Punkty przecięcia tych prostych z bokami trójkąta oraz wierzchołek kąta prostego tworzą pięciokąt. Oblicz pole tego pięciokąta, jeżeli długości przyprostokątnych trójkąta wynoszą 1 i 2.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS DRUGICH

Zadanie 1.
Wyznaczyć liczby całkowite x, y, z tak, aby była prawdziwa równość:
$\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - 2\right) \cdot \left(x\sqrt[3]{4} + y\sqrt[3]{2} + z\right) = 10$.

Zadanie 2.
Udowodnij, że dla dowolnych rzeczywistych x, y zachodzi nierówność :
$$x^2 + xy + y^2 \geq 3(x + y - 1).$$

Zadanie 3.
W trapezie prostokątnym odległość środka okręgu (wpisanego w ten trapez) od ramion trapezu wynosi d. Wykaż, że : $\frac{1}{d} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, gdzie a , b – długości podstaw trapezu.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS TRZECICH

Zadanie 1.
Wykazać, że jeśli $\sqrt{xy - z^2} + \sqrt{yz - x^2} + \sqrt{xz - y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, to $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

Zadanie 2.
Wielomian W(x) o współczynnikach całkowitych spełnia warunek W(2015)·W(2016)=2017.
Rozstrzygnij, czy wielomian ten może mieć pierwiastek całkowity.

Zadanie 3.
Wykaż, że dla wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych x, y zachodzi : $\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{y}} \geq \frac{2^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x+y}}$.

POWODZENIA ☺