

**XXXI KONKURS MATEMATYCZNY**  
**im. Prof. J. MARSZAŁA (etap powiatowy)**  
(23 październik 2015 r. godz. 10.00 – 12.00)

---

**ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS PIERWSZYCH**

**Zadanie 1.**

Wykaż , że dla każdej liczby naturalnej  $n$  liczba  $n^3 + 5n$  jest podzielna przez 6.

**Zadanie 2.**

Rozwiąż równanie w zbiorze liczb rzeczywistych :

$$2^{-1}(x^2 + 2y^2 + 3z^2) = x + 2y + 3z + 3\sqrt[3]{(\sqrt[4]{3} - \sqrt{2})(\sqrt[4]{3} + \sqrt{2})(2 + \sqrt{3})} .$$

**Zadanie 3.**

Sprawdź , czy istnieje trójkąt prostokątny, którego długości boków są liczbami pierwszymi. Odpowiedź uzasadnij.

---

**ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS DRUGICH**

**Zadanie 1.**

Dla dodatnich liczb rzeczywistych:  $a_1, a_2, a_3 \dots, a_{2016}$  takich , że  $a_1 a_2 a_3 \dots a_{2016} = 1$  wykaż :  $(2+a_1)(2+a_2)\dots(2+a_{2016}) \geq 2^{3024}$ .

**Zadanie 2.**

Znajdź wszystkie trójki liczb rzeczywistych  $(x,y,z)$  dla których spełnione jest równanie :

$$x^2 y^2 z^2 - y^2 z^2 - 2x^2 z^2 - 3x^2 y^2 + 2z^2 + 3y^2 + 6x^2 = 6.$$

**Zadanie 3.**

Wewnątrz trójkąta równobocznego o boku długości 1 obrano punkt P. Odległość punktu P od wierzchołków trójkąta wynosi  $x, y, z$  . Udowodnij, że suma kwadratów tych odległości jest mniejsza od 2.

---

**ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS TRZECICH**

**Zadanie 1.**

Rozwiąż układ równań: 
$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} .$$

**Zadanie 2.**

W kwadracie o boku 1 danych jest 51 punktów . Udowodnić, że istnieje koło o promieniu  $\frac{1}{7}$ , w którym znajdują się co najmniej 3 spośród tych punktów.

**Zadanie 3.**

Dla jakich wartości parametru rzeczywistego  $m$  równanie :  $4^x - m^2 2^x + 2m^2 - 1 = 0$  ma dwa różne rozwiązania dodatnie?