XXX KONKURS MATEMATYCZNY
im. Prof. J. MARSZAŁA (finał)
(27 listopada 2015 r. godz. 10.00 – 12.00)

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS PIERWSZYCH

Zadanie 1.
Wykaż, że pole trapezu prostokątnego jest nie większe od $\frac{1}{4}$ sumy kwadratów długości jego przekątnych.

Zadanie 2.
Wyznacz zbiór wszystkich całkowitych dzielników liczby
$L = \sqrt[3]{80\sqrt{5} - 200} + \sqrt[4]{1400 - 600\sqrt{5}}$.

Zadanie 3.
Rozwiąż w zbiorze liczb całkowitych: $2yx^2 - x^3 + x = 16 + 2y$.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS DRUGICH

Zadanie 1.

Rozwiąż w zbiorze liczb rzeczywistych: $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{2}{xy} cos^2\alpha \\ x + y + z = 5 \end{cases}$

Zadanie 2.
Udowodnij, że iloczyn 4 kolejnych liczb całkowitych powiększony o 1 jest kwadratem nieparzystej liczby całkowitej.

Zadanie 3.
Wiedząc, że pierwiastek trzeciego stopnia ze średniej arytmetycznej długości boków trójkąta jest odwrotnością średniej geometrycznej tych długości wykaż, że: $P_\Delta < \frac{\sqrt{6}}{4}$.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS TRZECICH

Zadanie 1.
Ile wyrazów dodatnich posiada ciąg: $\sin 1°$, $\sin 10°$, $\sin 100°$, $\sin 1000°$, ... ?

Zadanie 2.
Wyznacz wszystkie pierwiastki rzeczywiste równania:
$(x^{2n} + 1)(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n-2}) = 2nx^{2n-1}$, gdzie n jest daną liczbą naturalną.

Zadanie 3.
Wykaż, że w trójkącie środek okręgu wpisanego dzieli odcinek AD dwusiecznej zawarty w trójkącie ABC w stosunku: $\frac{|AS|}{|SD|} = \frac{b+c}{a}$, gdzie S - środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC, D - punkt przecięcia dwusiecznej kąta CAB z bokiem CB, zaś a, b, c - długości boków odpowiednio BC, AC, AB.

POWODZENIA ☺