

XXX KONKURS MATEMATYCZNY
im. Prof. J. MARSZAŁA (finał)
(28 listopada 2014 r. godz. 10.00 – 12.00)

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS PIERWSZYCH

Zadanie 1.

Wyznacz wszystkie pary (x, y) liczb rzeczywistych spełniających równanie $x\sqrt{n} + y\sqrt{n} = n\sqrt{x^2 + y^2}$, gdzie $n \in N$ i $n \geq 2$.

Zadanie 2.

Udowodnij, że do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{3}x + \sqrt{2}$ nie należy żaden punkt kratowy, czyli punkt o współrzędnych całkowitych.

Zadanie 3.

We wnętrzu trójkąta równobocznego obrano punkt P i poprowadzono z niego odcinki prostopadłe do jego boków. Pole kwadratu, którego bokiem jest suma długości tych trzech otrzymanych odcinków, jest równe 36cm^2 . Oblicz obwód tego trójkąta.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS DRUGICH

Zadanie 1.

Dana jest funkcja $f(t) = \frac{t^4+12}{t}$ dla $t \in R_+$. Wyznacz te argumenty t dla których funkcja przyjmuje wartość najmniejszą.

Zadanie 2.

Rozwiąż równanie $x_1(x_3 + 1) + x_2(x_1 + 1) + x_3(x_2 + 1) = x_1x_2x_3$ z niewiadomymi x_1, x_2, x_3 w zbiorze liczb całkowitych nieujemnych.

Zadanie 3.

Niech h_1, h_2 oznaczają wysokości równoległoboku o polu S. Wykaż, że zachodzi nierówność $\sqrt{S}(h_1 + h_2) \geq 2h_1h_2$.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS TRZECICH

Zadanie 1.

Wykaż, że wartość wyrażenia $A = \left| \frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x} \right|$ jest mniejsza od $\frac{1}{8}$ dla x, y, z będącymi długościami boków trójkąta.

Zadanie 2.

Równania $x^3 + ax + b = 0$ i $x^3 + cx + d = 0$ mają wspólny pierwiastek. Udowodnij, że współczynniki a, b, c, d spełniają równość $(ad - bc) \cdot (a - c)^2 = (b - d)^3$.

Zadanie 3.

Wykaż, że jeżeli w trójkącie ABC kąty wewnętrzne mają miary α, β, γ i spełniony jest warunek $\beta = 3\alpha$, to długości odpowiadających im boków spełniają równość $\frac{c^2}{(a-b)^2} = \frac{a+b}{a}$.