

XXIX KONKURS MATEMATYCZNY
im. Prof. J. MARSZAŁA (etap powiatowy)
(8 listopada 2013 r. godz. 10.00 – 12.00)

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS PIERWSZYCH

Zadanie 1.

Środek ciężkości trójkąta równobocznego T o boku długości a jest środkiem koła K o promieniu równym średniej geometrycznej długości promienia koła opisanego na trójkącie T i długości promienia koła wpisanego w trójkąt T . Oblicz pole figury $K - T$.

Zadanie 2.

Rozwiąż równanie $x^3 - 1 = 3y^2 + x$ w zbiorze liczb całkowitych.

Zadanie 3.

Niech liczby x, y należą do przedziału $(-1; 1)$. Udowodnij, że zachodzi nierówność

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{2}{1+xy}.$$

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS DRUGICH

Zadanie 1.

Punkty N i M dzielą dwa nierównoległe odcinki CA i CB odpowiednio tak, że $\frac{|AM|}{|NC|} = \frac{1}{n}$ i $\frac{|BM|}{|MC|} = \frac{1}{m}$. Niech P będzie punktem przecięcia się odcinków AM i BN . W jakim stosunku punkt P dzieli odcinek AM ?

Zadanie 2.

Rozwiąż równanie $\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} = 3$ w zbiorze liczb naturalnych?

Zadanie 3.

Niech $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ będą liczbami dodatnimi, natomiast liczba S ich sumą. Udowodnij, że $\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \dots + \frac{a_n}{S-a_n} \geq \frac{n}{n-1}$ dla $n \geq 2$.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS TRZECICH

Zadanie 1.

Wielokąt opisany na okręgu o promieniu długości r rozcięto na n trójkątów ($n > 1$). Udowodnij, że suma długości promieni okręgów wpisanych w te trójkąty jest większa od r .

Zadanie 2.

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b większych od $\sqrt{2}$ zachodzi nierówność $a^4 + b^4 - ab^3 - a^3b > a^2 + b^2 - a^2b^2$.

Zadanie 3.

Wiedząc, że $x + y + z = a$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{c}$, wyznacz sumę $x^3 + y^3 + z^3$.