XXIX KONKURS MATEMATYCZNY
im. Prof. J. MARSZAŁA (finał)
(29 listopada 2013 r. godz. 10.00 – 12.00)

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS PIERWSZYCH

Zadanie 1.
Przekątne trapezu ABCD przecinają się w punkcie O i dzielą ten trapez na cztery trójkąty. Pola trójkątów ABO i CDO są równe odpowiednio P_1 i P_2. Oblicz pole tego trapezu.

Zadanie 2.
Udowodnij, że jeżeli $x \neq y,\ y \neq z,\ z \neq x$, to
$\frac{1}{2}\left(\frac{x-y}{(z-x)(z-y)} + \frac{y-z}{(x-y)(x-z)} + \frac{z-x}{(y-z)(y-x)}\right) = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x}$.

Zadanie 3.
Rozwiązać w liczbach rzeczywistych równanie $x^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 = \frac{1}{3}$.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS DRUGICH

Zadanie 1.
W trójkącie równoramiennym ABC, gdzie $|AC| = |BC|$ poprowadzono wysokości: AM, CK, BL. Wiedząc, że $|AB|$ jest średnią geometryczną długości wysokości CK i AM wyznacz tangens kąta wewnętrznego przy podstawie tego trójkąta.

Zadanie 2.
Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $a_1,\ a_2,\ a_3$ spełniona jest nierówność $\frac{a_1a_2}{a_1+a_2} + \frac{a_2a_3}{a_2+a_3} + \frac{a_3a_1}{a_3+a_1} \leq \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$.

Zadanie 3.
Dane są różne liczby pierwsze p, q oraz takie dodatnie liczby całkowite a, b, że liczba aq daje resztę 1 przy dzieleniu przez p, natomiast liczba bp daje resztę 1 przy dzieleniu przez q.
Wykaż, że $\frac{a}{p} + \frac{b}{q} > 1$.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS TRZECICH

Zadanie 1.
Na okręgu o promieniu długości r opisano trapez równoramienny. Punkty styczności dzielą ramiona tego trapezu w stosunku 2:1. Oblicz długość promienia R okręgu opisanego na tym trapezie.

Zadanie 2.
Znajdź wszystkie pary liczb rzeczywistych spełniających układ równań: $\begin{cases} 2^{x^2+y} + 2^{x+y^2} = 128 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2\sqrt{2} \end{cases}$.

Zadanie 3.
Liczby a, b, c są liczbami dodatnimi i $abc = 1$. Wykaż, że $(x+a)(x+b)(x+c) \geq (x+1)^3$.

POWODZENIA ☺