

XVII Podkarpacki Konkurs Matematyczny
dla szkół ponadgimnazjalnych
Poziom I
(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów)
Etap finałowy
22-04-2017, godzina 10.00 (150 minut)

- 1) Na przyprostokątnych AC i BC ($|AC| > |BC|$) trójkąta prostokątnego ABC, zbudowano na zewnątrz kwadraty BCDE i CAFG, następnie poprowadzono prostą AE, która przecięła bok BC w punkcie P oraz prostą BF która przecięła bok CA w punkcie Q. Sprawdź, czy odcinki CP i CQ są równe.
Uzasadnij, że dla $|AC| = b$ i $|BC| = a$, różnica pól czworokąta CQFG i czworokąta CPED wynosi:
$$\frac{(b-a)(a^2 + b^2 + 3ab)}{2a + 2b}$$
- 2) Wiek pana Franciszka w roku 1887 równał się sumie cyfr roku jego urodzenia. Ile lat miał wówczas pan Franciszek i w którym roku się urodził?
- 3) Rozwiąż równanie: $\frac{1}{x} + \frac{2}{xy} + \frac{3}{xyz} = 1$ w liczbach całkowitych dodatnich.
- 4) Rozwiąż układ równań: $y - \sqrt{x-1} = \frac{3}{y}$ i $x^2 y = \sqrt{x^5 - 4x^4}$
- 5) Dany jest dowolny trójkąt ABC, w którym bok BC jest równy a. W trójkącie tym poprowadzono środkową DB. Przez środek S tej środkowej i wierzchołek A trójkąta, prowadzono prostą, która przecięła bok BC w punkcie P. Wyznacz długość odcinka PB.

Powodzenia!

XVII Podkarpacki Konkurs Matematyczny
dla szkół ponadgimnazjalnych
Poziom II
(klasy drugie liceum i trzecie technikum)
Etap finałowy
22-04-2017, godzina 10.00 (150 minut)

- 1) Wyznacz wszystkie dodatnie wartości parametru m, dla których równanie:
 $m^2 x^3 + mx^2 + x - 7m^2 x = 0$ ma trzy różne rozwiązania całkowite.
- 2) Niech a, b, c będą długościami boków trójkąta. Wykaż, że
$$2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + 3.$$
- 3) Wykaż, że ułamek $\frac{7^{52} - 5 \cdot 7^{39} + 5 \cdot 7^{13} - 1}{7^{26} - 1}$ jest liczbą całkowitą złożoną.
- 4) Oblicz pole trapezu, mając dane długość jego wysokości h oraz długości jego przekątnych d i e.
- 5) Po tej samej stronie prostej AB zbudowano trzy półokręgi o średnicach $AB = 2a + 2b$, $AC = 2a$, $CB = 2b$. Oblicz promień koła wpisanego w figurę ograniczoną tymi półokręgami mając dane a i b.

Powodzenia!