XVI Podkarpacki Konkurs Matematyczny im. Franciszka Leji
dla szkół ponadgimnazjalnych
Poziom I
(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów)
Etap rejonowy 12-03-2016, godzina 10.00 (150 minut)

1. Podstawy AB i CD trapezu ABCD mają odpowiednio długości 13 i 5. Ramię AD jest prostopadłe do podstaw i ma długość 15. Symetralna ramienia BC przecina ramię AD w punkcie E. Oblicz długość odcinka AE.
2. Dany jest trójkąt równoramienny rozwartokątny. Symetralne ramion tego trójkąta dzielą jego podstawę na trzy równe części. Oblicz miary kątów tego trójkąta. Oblicz długość promienia koła opisanego na tym trójkącie przyjmując, że podstawa ma długość $6\sqrt{3}$.
3. Rozwiąż równanie: $x^2 + y^2 - 8x + 6y = -5^2$.
   Dla jakiej wymiernej wartości parametru a, wyrażenie $w = \left(2-\sqrt{5}\right)x + \left(2-a\sqrt{5}\right)y$ będzie liczbą wymierną dla x, y będących rozwiązaniami danego równania.
4. Ojciec miał x synów, pomiędzy których chciał podzielić swój majątek. Najstarszemu dał 1000 zł i 0,1 pozostałej części swego majątku. Drugi otrzymał 2000 zł i 0,1 nowej pozostałej części majątku. Trzeci otrzymał 3000 zł i 0,1 nowej pozostałej części majątku. Według tej zasady otrzymali pieniądze pozostali synowie. Wówczas okazało się, że każdy z nich otrzymał taką samą kwotę pieniędzy. Ilu synów miał ojciec i jaki majątek rozdzielił między nich?
5. Wyznacz liczbę naturalną A, jeśli jedna z trzech informacji o niej jest fałszywa, a dwie są prawdziwe (wyjaśnij która jest fałszywa):
   a. „A + 51 jest kwadratem pewnej liczby naturalnej”,
   b. „ ostatnią cyfrą liczby A jest 1”,
   c. „ A – 38 jest kwadratem pewnej liczby naturalnej”.

Powodzenia!

XVI Podkarpacki Konkurs Matematyczny im. Franciszka Leji
dla szkół ponadgimnazjalnych
Poziom II
(klasy drugie liceum i trzecie technikum)
Etap rejonowy 12-03-2016, godzina 10.00 (150 minut)

1. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c spełniających warunek $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$, prawdziwa jest nierówność: $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}} \geq 3$.
2. Dany jest trójkąt ABC o polu S. Na boku AB obrano punkty K i L takie, że AK = KL = LB. Na boku BC obrano punkty M i N takie, że BM = 2MN = 2NC. Na boku CA obrano punkty O i P takie, że CO = 3OP = 3PA. Oblicz pole sześciokąta KLMNOP.
3. Wykaż, że: $\sqrt{28+16\sqrt{3}} - \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} - \sqrt[4]{28+16\sqrt{3}} = 2$.
4. Udowodnij, że jeśli n jest liczbą całkowitą parzystą, to $\frac{n^3}{48} - \frac{n}{12}$ jest również liczbą całkowitą.
5. W czworokąt można wpisać okrąg i jego przekątne są prostopadłe. Wykaż, że iloczyny długości przeciwległych boków są równe.

Powodzenia!