XVI Podkarpacki Konkurs Matematyczny
dla szkół ponadgimnazjalnych
Poziom II (klasy drugie liceum i trzecie technikum)
Etap powiatowy
6 lutego 2016 r. godzina 10.00 (150 minut)

1. Wykaż, że jeżeli liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunek: $4a^4 + 14b^2 + c^2 + d^2 - 4a^2b - 4bc + 6bd = 0$, to $b + c + d = 0$.

2. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których prosta o równaniu $y = (m - 3)x + m + 2$ przecina parabolę o równaniu $y = x^2 + (2m + 2)x + m + 6$ w dwóch różnych punktach o pierwszych współrzędnych x_1, x_2 spełniających warunek $x_1^2 + x_2^2 \leq 17$.

3. W trójkącie prostokątnym o przeciwprostokątnej AB, wybrano punkt S, dla którego trójkąty SAB, SBC i SAC mają równe pola. Wiedząc, że $SA^2 + SB^2 = 5$, oblicz SC.

4. Wykaż, że liczba $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + \ldots + 3^{90}$ jest podzielna przez 4, 7 i 13.

5. Dany jest kwadrat ABCD o boku długości 4. Na bokach AB, BC, CD i DA umieszczono odpowiednio punkty K, L, M i N takie, że AN = 1, CM = 2 i BK = 3BL. Oblicz pole czworokąta KLMN wiedząc, że wyrażenie $KL^2 + LM^2 + MN^2 + NK^2$ osiąga najmniejszą możliwą wartość?

Powodzenia ☺

XVI Podkarpacki Konkurs Matematyczny
dla szkół ponadgimnazjalnych
Poziom I (klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów)
Etap powiatowy
06 lutego 2016 r. godzina 10.00 (150 minut)

1) Pięciu uczniów otrzymało zadanie ustawienia krzeseł na akademię szkolną. Próbowali je ustawić w rzędach, budując kwadrat, ale zabrakło im 26 krzeseł. Zmniejszyli więc bok kwadratu o jedno krzesło i wówczas okazało się, że w nowym kwadracie zostaje im 5 krzeseł. Ile krzeseł mieli ustawić uczniowie?

2) Udowodnij wzór : $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$. Korzystając z udowodnionego wzoru, znajdź liczby a, b takie, by : $a + b = 7$ i $a\cdot b = 12$.

3) Na trapezie o podstawach długości 3 i 15, opisano okrąg o środku należącym do dłuższej podstawy trapezu. Oblicz obwód tego trapezu.

4) Dane są liczby: $a = \sqrt[3]{10\sqrt{8}\cdot\sqrt{50}\cdot\sqrt[3]{250\cdot 2^2}} + \sqrt[3]{-2}$ oraz $b = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{2}$. Wykaż, że iloczyn liczb $a\cdot b$ jest liczba naturalną, mającą nieskończenie wiele dzielników naturalnych.

5) We wnętrzu kąta o mierze 60^o leży punkt S. Odległości punktu S od ramion tego kata wynoszą odpowiednio $\sqrt{6}$ i $4\sqrt{6}$. Oblicz odległość punktu S od wierzchołka kąta.

Powodzenia ☺