# XVI Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych

## Poziom I

**(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów z r. szk. 2015/2016)**

**Etap wojewódzki**

**23 kwietnia 2016, godzina 10.00**

**(150 minut)**

1. Boki prostokąta mają długości 12 i 16. W każdy trójkąt, na który przekątna dzieli ten prostokąt, wpisano okrąg. Oblicz odległość środków tych okręgów.

2. Liczby dodatnie *a, b, c* spełniają warunek $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$ Wykaż, że $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}\le\frac{1}{3}$.

3. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AB| = 16$ i $|AC| = |BC| = 10$. Przez wierzchołek C tego trójkąta poprowadzono trzy proste przecinające bok AB w punktach K, L, M.
   Proste te podzieliły kąt trójkąta przy wierzchołku C na cztery kąty przystające. Wyznacz długości odcinków $|CK|$, $|CL|$, $|CM|$.

4. Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} \sqrt[3]{y-x}=1 \\ \sqrt[3]{z-y}=1 \\ (x-1)^3+(y-2)^3+(z-3)^3=3 \end{cases}$.
   Sprawdź, czy rozwiązania układu spełniają warunek: $x^4 \cdot y \cdot z^{-2} = y$.

5. Ogrodnik ma posadzić drzewka, których jest mniej niż 1000. Gdyby sadził je rzędami po 37 sztuk w każdym rzędzie, to zostanie mu 8 drzewek. Jeśli zaś posadzi po 43 sztuki w każdym rzędzie, to zostanie mu 11 drzewek. Ile drzewek ma ogrodnik do posadzenia?

**Powodzenia!**

---

# XVI Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych

## Poziom II

**(klasy drugie liceum i trzecie technikum z r. szk. 2015/2016)**

**Etap wojewódzki**

**23 kwietnia 2014, godzina 10.00**

**(150 minut)**

1. Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych x i y, spełniających równanie:
   $$x^3 + 3x^2 + 3x + 7 = xy + 2y.$$

2. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d zachodzi:
   $$a^4+b^4+c^2+d\ge 2\cdot\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt{abcd}.$$

3. Wyznacz przedział w którym wyrażenie $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+24-10\sqrt{x-1}}$ ma stałą wartość.

4. Środek okręgu wpisanego w trapez prostokątny znajduje się w odległościach 3 cm i 4 cm od końców ramienia. Oblicz pole tego trapezu.

5. Na półokręgu, którego średnicą jest odcinek AB, obrano punkt S (różny od punktów A i B), którego rzutem prostokątnym na prostą AB jest punkt C. Następnie narysowano okrąg styczny do prostych SC i AB i mający jeden punkt wspólny z łukiem AS. Wykaż, że trójkąt, którego wierzchołkami są punkty S, B i punkt styczności narysowanego okręgu z prostą AB, jest równoramienny.

**Powodzenia!**