

XV Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych

Poziom I

(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów z r. szk. 2013/2014)

Etap powiatowy

28 luty 2015, godzina 10.00

(150 minut)

- 1) Kuba i Jacek zobaczyli w sklepie grę komputerową. Cena tej gry była liczbą pierwszą, najmniejszą z możliwych i taką, że: Kuba nie mógł kupić gry sam, bo zabrakło mu 74 zł, zaś Jackowi do samodzielnego kupienia gry zabrakło tylko 11 zł. Kiedy chłopcy złożyli się razem, to wciąż brakowało im pieniędzy, by kupić grę. Oblicz, ile złotych miał każdy z chłopców i ile kosztowała gra.
- 2) Rozwiąż w zbiorze liczb całkowitych nieujemnych równanie: $a^5 + a^5b^5 + b^5 = 2^{10}$.
- 3) Dany jest trójkąt prostokątny ABC, o przeciwprostokątnej AB długości p i kącie ostrym 30° . Okrąg o środku w wierzchołku kąta 30° dzieli dany trójkąt na dwie figury o równych polach. Oblicz promień tego okręgu. Wynik przedstaw w najprostszej postaci.
- 4) W trapezie równoramiennym ABCD, nie będącym równoległobokiem, dany jest punkt P jako środek ramienia AD trapezu oraz $|AP| = 2$, zaś kąt $\angle CPB$ ma 90° . Oblicz obwód i długości podstaw AB oraz CD tego trapezu, wiedząc, że przekątna trapezu ma długość $\sqrt{19}$.
- 5) Wykaż, że liczba k jest naturalna, jeśli:

$$k = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} \cdot \sqrt{0, (4)} \cdot \frac{1}{((2^{-1} + 2^{-1}) + 2^{-1})^{-1}}$$

Powodzenia!

XV Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych

Poziom II

(klasy drugie liceum i trzecie technikum z r. szk. 2013/2014)

Etap powiatowy

28 luty 2015, godzina 10.00

(150 minut)

1. Wykaż, że liczba $\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$ jest całkowita dla dowolnego n całkowitego.
2. Udowodnij, że jeżeli stosunek rozwiązań równania kwadratowego $ax^2 + (2a + b)x + 2b - a = 0$ ($a \neq 0$) wynosi 3:1, to $28a^2 - 20ab + 3b^2 = 0$.
3. W trapezie ABCD ($AB \parallel CD$) przekątne AC i BD przecinają się w punkcie O takim, że $AO : OC = k$ ($k > 1$). Pole trójkąta AOD jest równe P. Wyznacz w zależności od P i k pole trapezu ABCD.
4. Wykaż, że jeżeli dwie liczby rzeczywiste x i y spełniają warunek $x + y = 2$, to $x^4 + y^4 \geq 2$.
5. W prostokącie ABCD dane są długości boków $AB = 5$ i $AD = 2$. Na bokach AB, BC, CD i DA umieszczono odpowiednio punkty K, L, M i N takie, że $AN = 1$, $CM = 2$ i $BK = 2BL$. W jakim stosunku punkt K podzielił bok AB jeśli wiemy, że wyrażenie $KL^2 + LM^2 + MN^2 + NK^2$ osiąga najmniejszą możliwą wartość?

Powodzenia!