XV Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych

Poziom I

(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów z r. szk. 2014/2015)

Etap wojewódzki - 18 kwietnia 2015, godzina 10.00

(150 minut)

1. Dany jest trapez prostokątny ABCD, w którym ramie AD jest prostopadłe do podstaw trapezu. Podstawy trapezu mają długości |AB|=13, |CD|=5, zaś ramię AD ma długość |AD|=15. Symetralna ramienia BC przecina ramię AD w punkcie E. Oblicz obwód trapezu, oraz długość odcinka AE.

2. Pan P ma trójkę dzieci: starsze bliźniaki i młodszego syna. Wiek pana P oraz jego dzieci sa liczbami całkowitymi dodatnimi, ponadto wiek pana P to liczba całkowita o sumie cyfr równej 5. Pan P powiedział, że gdy sumę lat wszystkich jego dzieci pomnożymy przez jego wiek, to otrzymamy 256. Ile lat mają bliźniaki pana P. Przedstaw pełne rozumowanie z uzasadnieniem odpowiedzi.

3. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych nieujemnych, takich, że suma ich iloczynu i ilorazu jest równa 185. Przedstaw pełne rozwiązanie zadania, nie odgadując szukanych liczb.

4. Dla jakich rzeczywistych liczb x wyrażenie $\boldsymbol{w(x)}$ przyjmuje wartość najmniejszą, jeśli $\boldsymbol{w(x) = 4 - \sqrt{9 - \sqrt{2x^2 + 6\sqrt{2}x + 9}}}$. Wyznacz te najmniejsza wartość.

5. Na prostej AC, pomiędzy punktami A i C, leży punkt B. Po tej samej stronie prostej AC narysowano dwa trójkąty równoboczne: ABK oraz BCL. Niech M oznacza środek odcinka AL, zaś N oznacza środek odcinka KC. Wyznacz kąty trójkąta BMN.

Powodzenia!

XV Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych

Poziom II

(klasy drugie liceum i trzecie technikum z r. szk. 2014/2015)

Etap wojewódzki - 18 kwietnia 2015, godzina 10.00

(150 minut)

1. W trapezie ABCD, gdzie AB || CD i |AB| = a, |CD| = b , poprowadzono dwa odcinki EF i GH równoległe do AB, których końce E i G oraz F i H należą odpowiednio do boków AD i BC. Oblicz długości tych odcinków wiedząc, że podzieliły one dany trapez na trzy figury o równych polach.

2. Wykaż, że jeżeli a, b, c są takimi liczbami nieujemnymi, że $a + b + c = 3$, to $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} \leq \frac{3}{2}$.

3. Wykaż, że na czworokącie opisanym na kole można opisać koło wtedy i tylko wtedy, gdy cięciwy łączące punkty styczności przeciwległych boków czworokąta z kołem są prostopadłe.

4. Wyznacz wszystkie wartości wymierne parametru a, dla którego funkcja $f(x) = ax^2 + (a+1)x + a - 1$ ma wszystkie miejsca zerowe całkowite.

5. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n, liczba $\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{7}{15}n$ jest całkowita.

Powodzenia!