

XIV JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY
IM. HUGONA STEINHAUSA
6 GRUDNIA 2014 R.

Klasa I

1. Zbadaj, czy istnieją dwa prostokąty o długościach boków będących liczbami całkowitymi takie, że pole pierwszego z nich jest 2 razy większe od pola drugiego, zaś obwód drugiego jest 2 razy większy od obwodu pierwszego. Odpowiedź dokładnie uzasadnij.
 2. Pewna liczba sześciocyfrowa zaczyna się cyfrą 2. Jeśli tę cyfrę z pierwszego miejsca przestawimy na ostatnie, to otrzymamy liczbę równą czwartej części liczby pierwotnej. Jaka jest liczba pierwotna ?
 3. Sprawdź, czy iloczyn każdych czterech kolejnych liczb całkowitych parzystych zwiększony o 16 jest kwadratem liczby całkowitej.
 4. (S) Na płaszczyźnie dane są dwa czworokąty wypukłe. Każda z długości boków pierwszego z nich jest mniejsza od każdej z długości boków drugiego czworokąta. Czy z tego wynika, że pole pierwszego czworokąta jest mniejsze od pola drugiego z nich ? Odpowiedź dokładnie uzasadnij.
-

Klasa II

1. Wykaż, że liczba $\underbrace{1000\dots01}_{2014 \text{ zer}}$ jest podzielna przez 11.
 2. Zbadaj, czy istnieją dwa prostokąty o długościach boków będących liczbami całkowitymi takie, że pole pierwszego z nich jest 3 razy większe od pola drugiego, zaś obwód drugiego jest 3 razy większy od obwodu pierwszego. Odpowiedź dokładnie uzasadnij.
 3. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $(1+x)^n + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n \geq 2^{n+1}$.
 4. (S) Łączymy ze sobą środki kolejnych boków wypukłego czworoboku. Powstaje w ten sposób mniejszy czworobok. Udowodnij, że jest on równoległobokiem, którego pole jest połową pola dużego czworoboku. Czy twierdzenie utrzyma się bez założenia wypukłości ?
-

Klasa III

1. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną dodatnią taką, że po przeniesieniu jej cyfry jedności na pierwsze miejsce, uzyskamy liczbę 5 razy większą.
2. Sprawdź, że zachodzi równość $\sqrt[5]{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[5]{\frac{11-5\sqrt{5}}{2}} = \sqrt[7]{\frac{29+13\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[7]{\frac{29-13\sqrt{5}}{2}}$.
3. Zbadaj, czy istnieją dwa prostokąty o długościach boków będących liczbami całkowitymi takie, że pole pierwszego z nich jest 4 razy większe od pola drugiego, zaś obwód drugiego jest 4 razy większy od obwodu pierwszego. Odpowiedź dokładnie uzasadnij.
4. (S) Aby podzielić kąt na trzy równe kąty postępujemy następująco: na ramionach kąta wybieramy dwa punkty A i B równoodległe od wierzchołka kąta. Odcinek AB dzielimy na trzy równe części otrzymując punkty P i Q; prowadzimy półproste przez wierzchołek kąta oraz punkty P i Q otrzymując podział kąta na trzy kąty. Czy ta konstrukcja jest prawidłowa, tzn. czy otrzymaliśmy podział kąta na trzy równe kąty ? Odpowiedź dokładnie uzasadnij.