

XXVIII KONKURS MATEMATYCZNY
im. Prof. J. MARSZAŁA (etap powiatowy)
(9 listopada 2012 r. godz. 10.00 – 12.00)

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS PIERWSZYCH

Zadanie 1.

Rozwiązać układ równań w zbiorze liczb rzeczywistych:
$$\begin{cases} \left| \frac{x}{y} \right| + 1 = \frac{3}{|y|} \\ |x| + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Zadanie 2.

Na przeciwprostokątnej AB równoramiennej trójkąta ABC obrano takie punkty K i M, że $|\sphericalangle MCK| = 45^\circ$. Dowieść, że $|AK|^2 + |BM|^2 = |KM|^2$.

Zadanie 3.

Dane są liczby naturalne x, y takie, że liczba $\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{x}$ jest także naturalna. Dowieść, że $NWD(x, y) \leq \sqrt{x+y}$.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS DRUGICH

Zadanie 1.

Liczby x, y, z spełniają nierówności: $|x - y| - |z| \geq 0$, $|y - z| - |x| \geq 0$, $|z - x| - |y| \geq 0$. Udowodnić, że co najmniej jedna z tych liczb jest równa sumie dwóch pozostałych.

Zadanie 2.

Na boku AB równoległoboku ABCD obrano punkt M, a na bokach AD i CB takie punkty P i Q, że odcinki PM i QM są równoległe do przekątnych równoległoboku. Wykazać, że trójkąty PDM i QCM mają równe pola.

Zadanie 3.

Obliczyć wartość wyrażenia $\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b}$, jeżeli wiadomo, że zachodzi równość $1 + \frac{a-b}{a+c} = \frac{a-c}{b+c} - \frac{b-c}{a+b}$.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS TRZECICH

Zadanie 1.

Udowodnij, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność: $|x| - |y| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$.

Zadanie 2.

Ile istnieje równań postaci $x^2 - px - q = 0$, których współczynniki $p, q \in \mathbb{N}$ i pierwiastki dodatnie są mniejsze od 10?

Zadanie 3.

Znajdź największą stałą $m \in \mathbb{R}$ taką, że nierówność $\frac{mabc}{a+b+c} \leq (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2$ zachodzi dla wszystkich liczb dodatnich a, b, c . Kiedy zachodzi równość?