X Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych
Poziom I
(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów z r. szk. 2009/2010)
Etap wojewódzki
29 maja 2010, godzina 10.00
(150 minut)

1. Na zajęciach kółka matematycznego obecni są uczniowie i nauczyciel. Wiek nauczyciela jest o 24 lata większy niż średnia wieku uczniów, zaś o 20 lat większy niż średnia wieku wszystkich obecnych na zajęciach. Ilu uczniów uczestniczy w zajęciach kółka i jaki jest wiek nauczyciela?

2. W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczną CD. Wiadomo, ze środek okręgu wpisanego w trójkąt BCD pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wyznacz miary kątów trójkąta ABC.

3. Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2yz = 100 \\ 2yx - z^2 = 100 \end{cases}$.

4. Na dwóch stycznych zewnętrznie okręgach o jednakowych promieniach $r = 4$, opisano równoległobok. Znajdź długości boków i pole równoległoboku, jeśli odległość wierzchołka D równoległoboku od punktu styczności E wynosi 1.

5. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Powodzenia!

X Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych
Poziom II
(klasy drugie liceum i trzecie technikum z r. szk. 2009/2010)
Etap wojewódzki
29 maja 2010, godzina 10.00
(150 minut)

1. Udowodnij, że jeżeli a, b, c, d są liczbami całkowitymi i ciąg (a, b, c, d) jest ciągiem arytmetycznym, to liczba $abcd + (a - b)^4$ jest kwadratem liczby całkowitej.

2. Mianownik pewnego nieskracalnego ułamka, będącego ilorazem dwóch liczb naturalnych, jest o 1 mniejszy od kwadratu licznika tego ułamka. Jeżeli licznik i mianownik tego ułamka powiększymy o 2, to otrzymamy liczbę większą od $\frac{1}{4}$, a jeśli licznik i mianownik tego ułamka pomniejszymy o 3, to otrzymamy liczbę mniejszą od $\frac{1}{10}$. Co to za ułamek?

3. W trójkącie prostokątnym ABC z wierzchołka kąta prostego C poprowadzono wysokość CD i w każdy z trójkątów ABC, ACD i BCD wpisano okrąg. Wykaż, że suma promieni tych okręgów równa się wysokości CD.

4. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność: $ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c) \geq 6abc$.

5. Udowodnij, że jeżeli równanie $x^4 + ax + b = 0$ ma dwa równe pierwiastki, to $\left(\frac{a}{4}\right)^4 = \left(\frac{b}{3}\right)^3$.

Powodzenia!