VI Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych
Poziom I
(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów - r. szk. 2005/2006)
Etap wojewódzki
3 czerwca 2006, godzina 10.00
(150 minut)

1. Rozwiąż w liczbach całkowitych dodatnich równanie $x(y+1)^2 = 243y$.

2. Rozwiąż układ równań $\begin{cases} |x-y| - \frac{|x|}{x} = -1 \\ |2x-y| + |x+y-1| + |x-y| + y - 1 = 0 \end{cases}$.

3. Wykaż że nie istnieją liczby wymierne dodatnie a, b, c, d spełniające równość:
$$\left(a + b\sqrt{2}\right)^2 + \left(c + d\sqrt{2}\right)^2 = 4 + 5\sqrt{2}.$$

4. Dany jest odcinek AB oraz taki jego punkt C, że $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{a}{b}$. Udowodnij, że dla dowolnego punktu P płaszczyzny zachodzi równość $\overrightarrow{PC} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{PA} + \frac{a}{a+b}\overrightarrow{PB}$.

5. Udowodnij, ze jeżeli suma odległości dowolnego punktu trójkąta ostrokątnego od jego boków jest równa długości jednej z wysokości trójkąta, to trójkąt ten jest równoboczny.

Powodzenia!

VI Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych
Poziom II
(klasy drugie liceum i trzecie technikum - r. szk. 2005/2006)
Etap wojewódzki
3 czerwca 2006, godzina 10.00
(150 minut)

1. Rozwiąż równanie $x^2 - [x] = 2$, gdzie symbol $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x, to znaczy największą liczbę całkowitą nie większą od x.

2. Wykaż że nie istnieją liczby wymierne dodatnie a, b, c, d spełniające równość:
$$\left(a + b\sqrt{2}\right)^4 + \left(c + d\sqrt{2}\right)^4 = 4 + 5\sqrt{2}.$$

3. Niech $P(x)$ będzie wielomianem o wspólczynnikach całkowitych. Wykaż, że jeżeli wielomian $Q(x) = P(x) + 12$ ma co najmniej sześć rożnych pierwiastków całkowitych, to $P(x)$ nie ma pierwiastków całkowitych.

4. Wykaż, że jeżeli boki trójkąta i promień okręgu wpisanego w trójkąt mają całkowite długości, to obwód trójkąta jest liczbą parzystą.

5. Wykaż, że jeżeli h_a, h_b, h_c są długościami wysokości trójkąta, zaś r jest długością promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt i $h_a + h_b + h_c = 9r$, to ten trójkąt jest równoboczny.

Powodzenia!